

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»**  
**Инженерно-физический факультет высоких технологий**

Щиголев В.К.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**  
**СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ**  
**УРАВНЕНИЯ»**

для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий  
всех форм обучения

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения» / составитель: В. К. Щиголев. - Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения, изучающих дисциплину «Дифференциальные уравнения». В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля. Студентам очной формы обучения они будут полезны при подготовке к практическим занятиям и к экзамену по данной дисциплине.

*Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол № 11 от 18 июня 2019 г.).*

## Оглавление

Литература для изучения дисциплины .....	4
Тема 1. Введение. ....	4
Тема 2. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений первого порядка.....	4
Тема 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	4
Тема 4. Уравнение в полных дифференциалах. ....	5
Тема 5. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.....	5
Тема 6. Уравнения Лагранжа и Клеро. ....	5
Тема 7. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	5
Тема 9. Неоднородные дифференциальное уравнение n-го порядка. ....	6
Тема 10. Характеристическое уравнение.....	6
Тема 11. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.....	7
Тема 12. Нормальная система дифференциальных уравнений. ....	7
Тема 13. Первые интегралы нормальной системы.....	7
Тема 14. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. ....	8
Тема 15. Линейная неоднородная система уравнений.....	8
Тема 16. Интегрирование уравнений с помощью рядов.....	8
Тема 17. Устойчивость решения по Ляпунову.....	8
Тема 18. Погрешность аппроксимации и устойчивость разностной схемы. ....	9
Приложение 1. Задачи для самоконтроля.....	9
Приложение 2. Пример завершающего теоретического теста .....	10

## **Литература для изучения дисциплины**

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРС, 2000.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 с.

### **Тема 1. Введение.**

#### **Основные вопросы темы:**

1. Описание законов природы в форме дифференциальных уравнений.  
Основные определения.
2. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Метод изоклин.
3. Построение дифференциального уравнения по общему решению.  
Уравнения с разделяющимися переменными и приводимые к ним.

#### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен во Введении учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 1-29 задачника [2].

### **Тема 2. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений первого порядка.**

#### **Основные вопросы темы:**

4. Уравнения с разделяющимися переменными и приводимые к ним.
5. Однородные уравнения.
6. Уравнения, приводимые к однородным.

#### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1- 3 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 51-129 задачника [2].

### **Тема 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

#### **Основные вопросы темы:**

1. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.
2. Уравнения Бернулли и Риккати.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 4 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 136-171 задачника [2].

**Тема 4. Уравнение в полных дифференциалах.****Основные вопросы темы:**

1. Уравнение в полных дифференциалах. Понятие первого интеграла.
2. Интегрирующий множитель.
3. Приемы отыскания интегрирующих множителей.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 5 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 186-220 задачника [2].

**Тема 5. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной****Основные вопросы темы:**

1. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной, неизвестной функции.
2. Уравнение с однородной функцией в левой части.
3. Общий случай введения параметра.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 8 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 241-286 задачника [2].

**Тема 6. Уравнения Лагранжа и Клеро.****Основные вопросы темы:**

1. Дифференциальные уравнения, разрешимые относительно аргумента или неизвестной функции.
2. Уравнения Лагранжа и Клеро.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 8 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 287-296 задачника [2].

**Тема 7. Дифференциальные уравнения высших порядков.****Основные вопросы темы:**

1. Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

2. Сведение его к нормальной системе уравнений.
3. Частные случаи дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, допускающие понижение порядка.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1, 2 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 421-480 задачника [2].

**Тема 8. Линейные дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка.**

**Основные вопросы темы:**

1. Общая теория линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Определитель Вронского, проверка независимости решений.
3. Фундаментальная система решений.
4. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения. Теоремы о максимальном числе линейно-независимых решений.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 3 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 511-548 задачника [2].

**Тема 9. Неоднородные дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка.**

**Основные вопросы темы:**

1. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.
2. Принцип суперпозиции.
3. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородного уравнения  $n$ -го порядка.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 4 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 549-581 задачника [2].

**Тема 10. Характеристическое уравнение.**

**Основные вопросы темы:**

1. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение.
2. Построение фундаментальной системы решений в случае простых корней характеристического многочлена (действительных или комплексных).
3. Построение фундаментальной системы решений в случае кратных корней характеристического многочлена (действительных или комплексных).

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 4 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 582-588 задачника [2].

## **Тема 11. Линейные неоднородные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Структура частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и квазиполиномом в правой части.
2. Операторный метод отыскания частного решения такого уравнения.
3. Уравнение Эйлера.
4. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 5, 6 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 589-600 задачника [2].

## **Тема 12. Нормальная система дифференциальных уравнений.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Эквивалентность нормальной системы  $n$  дифференциальных уравнений одному уравнению  $n$ -го порядка, разрешенному относительно старшей производной.
2. Теоремы о непрерывной зависимости и непрерывной дифференцируемости решения нормальной системы по начальным условиям и по параметру.
3. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1, 2 главы 3 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 786-812 задачника [2].

## **Тема 13. Первые интегралы нормальной системы.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Понижение порядка нормальной системы, если известна часть первых интегралов.
2. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений.
3. Интегрируемые комбинации.
4. Общая теория линейных однородных систем дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 3 главы 3 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 786-812 задачника [2].

## **Тема 14. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. .**

### **Основные вопросы темы:**

1. Характеристическое уравнение как уравнение на отыскание собственных значений и собственных векторов матрицы системы.
2. Вид фундаментальной системы решений в случае простых корней (действительных и комплексных).
3. Вид фундаментальной системы решений в случае кратных корней (действительных и комплексных).

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 4 главы 3 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 826-845 задачника [2].

## **Тема 15. Линейная неоднородная система уравнений.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений.
2. Понижение порядка нормальной системы, если известна часть первых интегралов
3. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения линейной неоднородной системы.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 5 главы 3 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 846-850 задачника [2].

## **Тема 16. Интегрирование уравнений с помощью рядов.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов.
2. Отыскание фундаментальной системы решений уравнений Бесселя.

### **Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 7 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в примерах параграфа 7 главы 2 учебника [1].

## **Тема 17. Устойчивость решения по Ляпунову.**

### **Основные вопросы темы:**

1. Исследование устойчивости решения по первому приближению.



2. Функция Ляпунова.
3. Классификация точек покоя.

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфах 1, 2, 4 главы 4 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 899-906 задачника [2].

**Тема 18. Погрешность аппроксимации и устойчивость разностной схемы.**

**Основные вопросы темы:**

1. Методы, основанные на разложении в ряд Тейлора.
2. Метод Рунге-Кутты.
3. Устойчивость и сходимость.
4. Обоснование метода Эйлера и его вычислительной устойчивости

**Рекомендации по изучению темы:**

Вопрос изложен в параграфе 7 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в №№ 1074-1090 задачника [2].

**Приложение 1. Задачи для самоконтроля**

Решить уравнение	(Номер по задачнику [2])
1. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$	(53)
2. $xy' + y = y^2$	(56)
3. $y' - y = 2x - 3$	(63)
4. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$	(103)
5. $y^2 + x^2y' = xyu'$	(105)
6. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$	(106)
7. $x^3(y' - x) = y^2$	(121)
8. $xy' - 2y = 2x^4$	(136)
9. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$	(139)
10. $(x + y^2)dy = ydx$	(145)
11. $xydy = (y^2 + x)dx$	(155)
12. $x dx = (x^2 - 2y + 1)dy$	(161)
13. $x(e^y - y') = 2$	(163)
14. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$	(186)
15. $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$	(188)

16.  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$  (195)
17.  $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0$  (200)
18.  $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0$  (210)
19.  $8(y')^3 = 27y$  (242)
20.  $y^2(y'^2 + 1) = 1$  (245)
21.  $2xy' + y^2 = 1$  (302)
22.  $x^2y' - 2xy = 3y$  (312)
23.  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$  (422)
24.  $yy'' + y'^2 = 1$  (459)
25.  $y'' + y' - 2y = 0$  (511)
26.  $y'' - 4y' + 5y = 0$  (515)
27.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$  (527)
28.  $y''' - 3y' + 2y = 0$  (531)
29.  $y'' - y = 2e^x - x^2$  (535)
30.  $y'' + y = 4\sin x$  (538)
31.  $y''' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x$  (575)
32.  $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$  (581)
33.  $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$  (589)

## Приложение 2. Пример завершающего теоретического теста

Правильные варианты ответов отмечены «звездочкой».

**Вопрос 1:** Уравнение первого порядка  $y' + p(x)y = q(x)$  интегрируется путем разделения переменных,

Варианты ответов:

- только в случае  $p(x) = ax^2 + bx + c$
- только если  $p(x)$  неограниченно убывающая функция аргумента  $x$
- \*  если  $p(x)$  произвольная интегрируемая функция аргумента  $x$
- если только  $p(x)$  тригонометрическая функция аргумента  $x$

**Вопрос 2:** Уравнение

$$y' + \frac{y^2}{x} = \frac{y^2}{x^2} \ln x$$

имеет интегрирующий множитель вида  
 Варианты ответов:

$\frac{1}{x}$

\*   $x$

$\frac{1}{x^2}$

$x^2$

**Вопрос 3:** Назвать тип уравнения  $y' + p(x)y = q(x)y^2$  и определить соответствующую подстановку, необходимую для решения этого уравнения

Варианты ответов:

уравнение Бернулли,  $y^2$  — независимый параметр

уравнение Клеро,  $y^2$  — параметр

уравнение Лагранжа,  $y^2$  — параметр

\*  уравнение Клеро,  $y^2$  — параметр

**Вопрос 4:** Если уравнение первого порядка  $F(x, y, y') = 0$  удается разрешить относительно неизвестной функции, то есть представить его в виде

$$y' = f(x, y)$$

то, считая  $x$  и  $y^2$  параметрами, для нахождения зависимости  $p$  получают дифференциальное следствие этого уравнения (так называемый "метод интегрирования с помощью дифференцирования") следующего вида

Варианты ответов:

$x \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$

$p \frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dp}$

\*   $p \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}$

$x \frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dp}$

**Вопрос 5:** В уравнении  $n$ -го порядка

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

можно понизить порядок уравнения на единицу с помощью замены

Варианты ответов:

$y^2$  — параметр

\*   $y^2$  — параметр

$y^{(n)}$  — параметр

$$ay'' + by' + cy = 0$$

**Вопрос 6:** С помощью определителя Вронского установить, какая из следующих систем функций может быть линейно-независимой (фундаментальной) системой решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка  
Варианты ответов:

- \* (1)  $1, x, x^2$
- (2)  $1, \cos(2x), \sin^2(x)$
- (3)  $e^x, \operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x)$
- (4)  $e^x, e^{-x}, \operatorname{sh}(x)$

**Вопрос 7:** Для однородного уравнения Эйлера,

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

где  $a, b, c$  - константы, фундаментальную систему решений находят с помощью подстановки  $y = x^k$ , в результате которой соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

Варианты ответов:

- $ak^2 + bk + c = 0$
- $k^2 + ak + b = 0$
- $ck^2 + bk + a = 0$
- \*   $ak^2 + bk + c = 0$

**Вопрос 8:** Если у линейного однородного уравнения третьего порядка

$$ay''' + by'' + cy' + gy = 0,$$

где  $a, b, c$  и  $g$  - постоянные, одна характеристика  $k$  кратности 3, то общее решение этого уравнения имеет вид:

Варианты ответов:

- $c_1 e^{kx} + c_2 e^{kx} + c_3$
- \*   $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^{kx}$
- $c_1 x \sin kx + c_2 x^2 \cos kx + c_3 x^3$
- $c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^{kx}$

**Вопрос 9:** Используя метод неопределенных коэффициентов, частное решение  $y$  линейного неоднородного уравнения

$$y'' = y \cos 4x$$

следует искать в виде (A, B - неопределенные коэффициенты):

Варианты ответов:

- $y = Ax \cos 4x$
- $y = Ax \cos 4x + B \sin 4x$
- \*   $y = A \cos 4x + B \sin 4x$

$$y = e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx)$$

**Вопрос 10:** Для линейной однородной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

где  $a, b, c$  и  $d$  - константы, характеристическое уравнение можно записать в виде

Варианты ответов:

$k^2 - 1 = 0$

$k^2 - ad - bc = 0$

$k^2 - adk - bc = 0$

\*   $k^2 - ad - bc = 0$